DÉLÉGATION GÉNÉRALE POUR L'ARMEMENT
CONCOURS D'ADMISSION A
l'Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs
des Études et Techniques d'Armement
1991
MATHÉMATIQUES 1 Options M, P et TA
Durée : 4 heures

Un corrigé

Première partie

1. Il est clair que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. Pour la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il suffit de remarquer que les deux suites sont à termes positifs (vérification par récurrence).

2. On remarque que $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ pour tous x et y positifs, puis par développement de cette inégalité on obtient $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$. L'inégalité $a_n \geq b_n$ est une conséquence immédiate de l'inégalité précédente, avec $x = a_{n-1}$ et $y = b_{n-1}$ (les deux suites sont bien définies et toujours positives).

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} \leq a_n.$$

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De même,

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n.$$

Donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
On sait déjà que $a_{n+1} - b_{n+1} \geq 0$. De plus,

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{b_n a_n}}{2}.$$

Puisque $0 \leq b_n \leq a_n$ et par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$, on a $\sqrt{a_n b_n} \geq b_n$. On en déduit que

$$a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{b_n + a_n - 2b_n}{2} = \frac{1}{2}(a_n - b_n).$$

De la relation précédente, on déduit par une récurrence immédiate que, pour tout entier naturel n, on a

$$0 \leq a_n - b_n \leq \frac{1}{2^n}(a_0 - b_0).$$

Ainsi, $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes : elles convergent vers la même limité, notée $M(a,b)$.

4. (a) Soient les suites $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\begin{cases} a'_0 = b \\ a'_n = a_n, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ et $\begin{cases} b'_0 = a \\ b'_n = b_n, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Les suites $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ne diffèrent que par leur premier terme, elles ont donc même limite et donc $M(b,a) = M(a,b)$.

(b) Pour tout $c \in \mathbb{R}_+^*$, les suites $(ca_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(cb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient les relations de récurrences définissant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc elles convergent vers $M(ca_0, cb_0) = M(ca, cb)$. D'où par unicité de la limite :

$$M(ca, cb) = cM(a,b).$$

(c) Les suites $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $\begin{cases} a'_0 = a_1 \\ a'_n = a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ et $\begin{cases} b'_0 = b_1 \\ b'_n = b_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ sont convergentes de même limite et donc $M(a,b) = M(a_1, b_1) = M\left(\sqrt{ab}, \dfrac{a+b}{2}\right)$.

5. On a $a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)^2 - ab = \left(\dfrac{a_n-b_n}{2}\right)^2$, donc $a_{n+1} - b_{n+1} = (a_n - b_n)^2 \dfrac{1}{4(a_{n+1}+b_{n+1})}$ et donc

$$a_{n+1} - b_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a_n^2 - b_n^2}{8M(a,b)}.$$

Deuxième partie

1. Si $x \in [0,1[$, la fonction $t \mapsto 1 - x^2\sin^2 t$ ne s'annule pas sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ car $|1 - x^2\sin^2 t| \geq 1 - x^2\sin^2 t \geq 1 - \sin^2 t$.

• Si $t \neq \dfrac{\pi}{2}$, $1 - \sin^2 t > 0$.

• Si $t = \dfrac{\pi}{2}$, $1 - x^2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - x^2 > 0$.

Donc la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2\sin^2 t}}$ est bien définie et continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, donc intégrable. Ainsi, la fonction Φ est bien définie sur l'intervalle $[0,1[$.

Posons $f(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2\sin^2 t}}$.

• f continue sur $[0,1[\times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc continue par rapport à t et par rapport à x.

• L'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment $[c,d]$ inclus dans $[0,1]$. En effet, $[c,d] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ étant une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ (en tant que fermé borné en dimension finie), la continuité de f justifie l'existence de $M_{c,d} \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall (x,t) \in [c,d] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad |f(x,t)| \leq M_{c,d}.$$

La constante $M_{c,d}$ joue le rôle de la fonction dominante qui est intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

En utilisant le théorème de continuité sous le signe intégrale, Φ est continue sur $[0,1[$.

2. $x \mapsto \sqrt{1 - x^2\sin^2 t}$ est décroissante sur $[0,1[$, donc $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2\sin^2 t}}$ est croissante et par croissante de l'intégrale, $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - x^2\sin^2 t}}$ est croissante sur $[0,1[$.

3. (a) Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{(1+x)\sin t}{1 + x\sin^2 t}$ est une fonction homographique croissante sur $[0,1[$, donc

$$\forall x \in [0,1[, \quad \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leq \sin t \leq \frac{(1+x)\sin t}{1 + x\sin^2 t} \leq \frac{2\sin t}{1 + \sin^2 t} \leq 1.$$

On peut donc définir $\theta = \arcsin \dfrac{(1+x)\sin t}{1 + x\sin^2 t}$, et on aura $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(b) Le réel x étant dans $[0,1[$, la fonction $v : t \mapsto \dfrac{(1+x)\sin(t)}{1 + x\sin^2(t)}$ est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et pour tout t de cet intervalle :

$$v'(t) = \frac{(1+x)\cos(t)(1 + x\sin^2(t)) - 2x\cos(t)\sin(t)(1+x)\sin(t)}{(1 + x\sin^2(t))^2} = \frac{(1+x)\cos(t)(1 - x\sin^2(t))}{(1 + x\sin^2(t))^2} > 0$$

Ainsi, v est strictement croissante, et $u(0) = 0$, $u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$. En particulier, pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $u(t) \in [0,1]$.

On pose alors $\theta = u(t) = \arcsin v(t)$ pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(c) Par composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, on en déduit que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(d) Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1-(1+x)^2\sin^2(t)}{(1+x\sin^2 t)2}}} \\
&= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} \frac{1}{\sqrt{(1-x\sin^2(t))2-(1+x)^2\sin^2(t)}} \\
&= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} \frac{1}{\sqrt{(1-x\sin^2(t)-(1+x)\sin(t))(1-x\sin^2(t)+(1+x)\sin(t))}} \\
&= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} 1\sqrt{(1-sin(t))(1-xsin(t))(1+sin(t))(1+xsin(t))} \\
&= \frac{(1+x)\cos(t)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))} \frac{1}{\sqrt{\cos^2(t)(1-x^2\sin^2(t))}} \\
&= \frac{(1+x)(1-x\sin^2(t))}{(1+x\sin^2(t))\sqrt{(1-x^2\sin^2(t))}} > 0
\end{aligned}
$$

Don u est bijective de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur lui-même d'après le théorème de la bijection, car elle est continue et strictement croissante.

(e)

4. (a) Posons $S = \frac{\cos t}{1+x\sin^2 t}\sqrt{1-x^2\sin^2 t}$ et calculons $1-S^2$. On a donc :

$$
\begin{aligned}
1-S^2 &= 1-\cos^2 t\frac{1-x^2\sin^2 t}{(1+x\sin^2 t)^2} \\
&= \frac{(\sin t + x\sin t)^2}{(1+x\sin^2 t)^2} \\
&= \sin^2\theta
\end{aligned}
$$

D'où $S^2 = 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$. Comme S est positif pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\cos\theta = S = \frac{\cos t}{1+x\sin^2 t}\sqrt{1-x^2\sin^2 t}$.

(b) On vérifie facilement que $1-\frac{4x}{(1+x)^2}\sin^2\theta = \frac{(1-x\sin^2 t)^2}{(1+x\sin^2 t)^2} > 0$. D'où

$$\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\sin^2\theta} = \frac{1-x\sin^2 t}{1+x\sin^2 t}.$$

(c) On a : $\Phi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}$. On effectue alors dans cette intégrale le changement de variable $t = u^{-1}(\theta)$ puisque u est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a alors $\theta = u(t)$ d'où

$$\mathrm{d}\theta = u'(t)\mathrm{d}t = (1+x)\frac{1-x\sin^2 t}{(1+x\sin^2 t)}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}} = (1+x)\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}t}{1-x^2\sin^2 t}$$

compte tenu de tous les calculs précédents, donc

$$\Phi(x) = \frac{1}{1+x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\sin^2\theta}} = \frac{1}{1+x}\Phi\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

5.

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2 - (a^2-b^2)\sin^2 t}} \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t} \\ &= \frac{1}{a}\Phi\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right) \end{aligned}$$

compte tenu de $0 < b \leq a$ (et l'on a bien $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \in [0,1[$).
Puisque l'on a aussi $\dfrac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > 0$, on aura de la même façon :

$$\begin{aligned} I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) &= \frac{2}{a+b}\Phi\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab}}{\frac{a+b}{2}}\right) \\ &= \frac{2}{a+b}\Phi\left(\frac{a-b}{a+b}\right) \\ &= \frac{2}{a+b}\frac{1}{1+\frac{a-b}{a+b}}\Phi\left(\frac{2\sqrt{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)}}{1+\frac{a-b}{a+b}}\right) \quad \text{d'après 4.c} \\ &= \frac{1}{a}\Phi\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right) \\ &= I(a,b) \end{aligned}$$

6. Supposons $a \geq b$. Alors on a vu que $a_n \geq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc, d'après le résultat de la question précédente, $I(a_n, b_n) = I\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right) = I(a_{n+1}, b_{n+1})$, d'où l'on tire facilement par récurrence

$$I(a_n, b_n) = I(a_0, b_0) = I(a,b).$$

Ce résultat reste vrai si $a \leq b$, puisque le changement de variable $t \mapsto \dfrac{\pi}{2} - t$ montre que $I(a,b) = I(b,a)$. La fonction I étant continue (puisque Φ l'est), l'égalité précédente donne, par passage à la limite,

$$I(a,b) = I\left(M(a,b), M(a,b)\right) = \frac{1}{M(a,b)}\Phi(0) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{M(a,b)}.$$

7. La relation $\Phi(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{M\left(1, \sqrt{1-x^2}\right)}$ pour $x \in [0,1[$ découle du résultat précédent avec $a = 1$ et $b = \sqrt{1-x^2}$.

Troisième partie

1. D'après le cours sur les séries entière $(1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ pour $|x| < 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. En particulier, pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on obtient

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n n!)^2} x^n.$$

2. (a) On intègre par parties W_{n+1} en écrivant $\sin^{2n+2} t = \sin^{2n+1} t \sin t$, en dérivant $\sin^{2n+1} t$ et en intégrant $\sin t$. On obtient :

$$W_{n+1} = (2n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t \cos^2 t\mathrm{d}t = (2n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t.$$

Remettant ensembles tous les termes qui contiennent W_{n+1}, on obtient $2(n+1)W_{n+1} = (2n+1)W_n$, ou encore $W_n = \dfrac{2n-1}{2n}W_{n-1}$. On obtient donc :

$$W_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1}{2n(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2}W_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}.$$

(b) On sait $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^n$ et comme $|x\sin\theta| < 1$ pour tout $x \in [0,1[$ et $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors :

$$\Phi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\theta)\mathrm{d}\theta$$

avec $u_n(\theta) = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}\sin^{2n}\theta$.

Les fonctions u_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et sa somme est continue par morceaux. Les fonctions u_n sont aussi intégrables sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on a, d'après la question **2. a)** de cette partie :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |u_n(\theta)|\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right)^2 x^{2n}$$

Par la formule de Stirling

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |u_n(\theta)|\mathrm{d}\theta \sim \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Ce terme est le terme général d'une série convergente et l'on peut donc procéder à une intégration terme à terme donnant la relation proposée.

3. Posons $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ pour $x \in [0,1[$ avec $a_n = \left(\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2$. Sur $[0,1[$, la fonction y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1[$ avec $\forall x \in [0,1[$:

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^{2n-1} \text{ et } y''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n(2n-1)a_n x^{2n-2}.$$

Pour $x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}
(x^3-x)y''(x)+(3x^2-1)y'(x)+xy(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} 2n(2n-1)a_n x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2n(2n-1)a_n x^{2n-1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} 6na_n x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2-2n+6n+1)a_n x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (4n^2-2n+2n)a_n x^{2n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 a_n x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (2n)^2 a_n x^{2n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 a_n x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (2(k+1))^2 a_{k+1} x^{2k+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 a_n x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (2k+1)^2 a_k x^{2k+1} \\
&\quad \text{car } (2n+1)^2 a_n = (2(n+1))^2 a_{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc y est une solution de l'équation différentielle (E) et comme il s'agit d'une équation différentielle linéaire, Φ est aussi solution de (E).

4. On a $\forall t \in]0,1[$, $(t^3-t)\Phi''(t)+(3t^2-1)\Phi'(t)+t\Phi(t)=0$. L'application $x \mapsto t=\xi(x)=\sqrt{1-x^2} \in]0,1[$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]0,1[$ dans $]0,1[$. De plus on a :

$$g'(x) = -\Phi'(t)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } g''(x) = \Phi''(t)\frac{x^2}{1-x^2} - \Phi'(t)\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

D'où, pour tout $x \in]0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
(x^3-x)g''(x)+(3x^2-1)g'(x)+xg(x) &= x\left(-\Phi''(t)x^2+\Phi'(t)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - (3x^2-1)\Phi'(t)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + x\Phi'(t) \\
&= -(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\Phi''(t) + \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\Phi'(t) - (3(1-t^2)-1)\Phi'(t)\frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \\
&\quad + \sqrt{1-t^2}\Phi'(t) \\
&= \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\left((t^3-t)\Phi''(t)+(3t^2-1)\Phi'(t)+t\Phi(t)\right) = 0
\end{aligned}$$

Donc g est bien une solution de l'équation différentielle (E) sur $]0,1[$.

5. Puisque Φ est croissante sur $[0,1[$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \Phi(x)$ existe (théorème de la limite monotone). Supposons $l = \lim\limits_{x\to 1^-} \Phi(x)$ est fini, alors $\Phi(x) = \dfrac{1}{1+x}\Phi\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ entraine, par caractérisation de la limite, $l = \dfrac{l}{2}$ et donc $l=0$. Mais d'après la définition de Φ, $\lim\limits_{x\to 1^-} \Phi(x) > 0$ ce qui est absurde. Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \Phi(x) = +\infty$.

Maintenant, soient α et β de $\mathbb{R}$ tels que $\alpha\Phi+\beta g=0$. Si $\alpha \neq 0$, alors $\forall x \in [0,1[$, $\beta\Phi\left(\sqrt{1-x^2}\right) = -\alpha\Phi(x)$ ce qui donne par passage à la limite $\beta\Phi(0) = -\alpha \lim\limits_{x\to 1^-} \Phi(x)$ ce qui est absurde et donc nécessairement $\alpha = 0$ et donc $\beta = 0$. Donc la famille (Φ, g) est libre.

6. Les fonctions proposées Φ et g sont solutions sur $]0,1[$ à l'équation étudiée. Cela fournit un système fondamental de solutions de (E) sur $]0,1[$. Puisque l'espace des solutions de cette équation homogène est de dimension 2, on peut conclure que la solution générale est

$$t \mapsto y(t) = \lambda\Phi(t)+\mu g(t) = \lambda\Phi(t)+\mu\Phi\left(\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{A}{M\left(1,\sqrt{1-x^2}\right)} + \frac{B}{M(1,x)} \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

Quatrième partie

1. Pour α un réel fixé, on pose la fonction $t \mapsto f(t) = t^\alpha e^{-t^2}$. Cette fonction est alors continue et positive sur $]0, +\infty[$.

• Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim \dfrac{1}{t^{-\alpha}}$. Or d'après la règle des équivalents, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est convergente, si et seulement si, $-\alpha < 1$ ou encore $\alpha > -1$.

• Au voisinage de $+\infty$, on a $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi, la fonction $\alpha \mapsto G(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est bien définie pour tout $\alpha > -1$.

2. Selon le théorème de Fubini, on peut écrire :

$$\int\int_\Delta (xy)^\alpha e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a x^\alpha e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_0^a y^\alpha e^{-y^2}\mathrm{d}y = [J(\alpha, a)]^2$$

3. Il suffit de remarquer que la fonction sous-signe intégrale est positive et que $\Delta_1 \subset \Delta \subset \Delta_2$.

4. Par application du changement de variables dans une intégrale double et de la notion de jacobien, on peut passer en coordonnées polaires en posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ avec r positif et θ élément de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Dans ce cas, le jacobien est celui de la fonction $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, soit :

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Vu que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on a $x^2 + y^2 = r^2$ et les deux intégrales doubles qui encadrent $[J(\alpha, a)]^2$ deviennent :

$$\int\int_{\Delta_1} x^\alpha y^\alpha e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a r^{2\alpha+1}e^{-r^2}\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha\theta\cos^\alpha\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\int\int_{\Delta_2} x^\alpha y^\alpha e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{a\sqrt{2}} r^{2\alpha+1}e^{-r^2}\mathrm{d}r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha\theta\cos^\alpha\theta\mathrm{d}\theta.$$

Les deux intégrales convergent vers $G(2\alpha+1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha\theta\cos^\alpha\theta\mathrm{d}\theta$ quand a tend vers vers $+\infty$. L'égalité en question s'obtient par passage à la limite lorsque a tend vers $+\infty$.

5. La relation $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ montre que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha\theta\cos^\alpha\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^\alpha \mathrm{d}\theta = 2^{-\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha 2\theta\mathrm{d}\theta$. Le changement de variable $t = 2\theta$ conduit à :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha\theta\cos^\alpha\theta\mathrm{d}\theta &= 2^{-\alpha}\int_0^{\pi} \sin^\alpha t\frac{\mathrm{d}t}{2} \\
&= 2^{-\alpha-1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^\alpha t\mathrm{d}t\right) \\
&= 2^{-\alpha-1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^\alpha x(-\mathrm{d}x)\right), \quad t = \pi - x \\
&= 2^{-\alpha-1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\mathrm{d}x)\right) \\
&= 2^{-\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha t\mathrm{d}t \\
&= 2^{-\alpha}K(\alpha)
\end{aligned}$$

D'où $[G(\alpha)]^2 = 2^{-\alpha}K(\alpha)G(2\alpha+1)$.

6. Par intégration par parties, on a :

$$G(2\alpha+1)=\int_0^{+\infty} t^{2\alpha+1}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{2}t^{2\alpha}e^{-t^2}\right]_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{2\alpha-1} e^{-t^2}\mathrm{d}t=\alpha G(2\alpha-1).$$

D'où, en particulier,

$$G(9)=G(2\times 4+1)=4\times 3\times 2\times 1\times G(1).$$

Mais $G(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2}.$

Finalement, $G(4)^2=2^{-4}K(4)G(9)=\dfrac{1}{24}w_2G(9)=\dfrac{1}{24}\times\dfrac{4!}{(4\times 2)^2}\times\dfrac{\pi}{2}\times 12=\dfrac{9\pi}{96}$ et comme $G(4)$ est positif, alors $G(4)=\dfrac{3}{8}\sqrt{\pi}$.

7. (a) Par intégration par parties de $K\left(\dfrac{3}{2}\right)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\mathrm{d}\theta$ en prenant $u'(\theta)=\sin\theta$ et $v(\theta)=\sqrt{\sin\theta}$:

$$\begin{aligned}
K\left(\frac{3}{2}\right) &= \left[-\cos\theta\sqrt{\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}-\frac{1}{2}K\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne bien $K\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}.$

(b) Le changement de variable $u=\sqrt{\sin\theta}$, soit $\theta=\arcsin u^2$, qui est une bijection strictement monotone de classe $\mathscr{C}^1$ de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,1[$, donne $\mathrm{d}\theta=\dfrac{2u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}$, d'où :

$$K\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^4}}.$$

(c) Dans l'intégrale ci-dessus, $u=\cos t$, qui réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,1[$, on obtient

$$\begin{aligned}
K\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{2}{3}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1+u^2)}}\\
&= \frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{-\sin t\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t(1+\cos^2 t)}}\\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\cos^2 t+\sin^2 t}}\\
&= \frac{2}{3}I\left(\sqrt{2},1\right)=\frac{\pi}{3M\left(\sqrt{2},1\right)}.
\end{aligned}$$

8. (a) Utilisons une intégration par parties dans le second intégrale, on obtient :

$$I'=\frac{-1}{4}\int_0^{+\infty}x(-4x^3e^{-x^4})\mathrm{d}x=\frac{-1}{4}\int_0^{+\infty}x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-x^4}\right)\mathrm{d}x=\frac{-1}{4}\left[xe^{-x^4}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}e^{-x^4}\mathrm{d}x=\frac{I}{4}.$$

D'où $I=4I'$.

(b) Utilisons cette fois le changement de variable $t = x^2$ qui est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$. Alors on a :

$$I' = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^4} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} G\left(\frac{3}{2}\right).$$

D'où $I = 4I' = 2G\left(\frac{3}{2}\right)$. D'autre part, d'après la relation de la question **5.** de cette partie, on a :

$$G\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2^{\frac{-3}{2}} K\left(\frac{3}{2}\right) G(4) = 2^{\frac{-3}{2}} \times \frac{\pi}{3M\left(\sqrt{2},1\right)} \times \frac{3}{8}\sqrt{\pi}.$$

Ainsi,

$$I = 2G\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{2^{\frac{-9}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}}{M\left(\sqrt{2},1\right)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

●●●●●●●●●●●